

ten, welche in normalem Vakuum aufgedampft wurden, zeigen schon von etwa 200 Å Dicke an eine Veränderung der Sättigungsmagnetisierung um 15% und mehr. Die Messungen von NEUGEBAUER¹³ und HOFFMANN⁸ an Schichten im Ultrahochvakuum dagegen zeigen eine noch etwas schwächere Abhängigkeit von der Schichtdicke als diese Theorie. Qualitativ stimmt das Resultat mit demjenigen von VALENTA (s. Anm. 5) überein. Ein genauerer Vergleich zwischen dem Experiment und den verschiedenen Theorien ist erst sinnvoll, wenn die gleichen Gittertypen

¹³ C. A. NEUGEBAUER, Phys. Rev. **116**, 1441 [1959]; J. Appl. Phys., Suppl. **31**, 152 [1960].

und mehrere Lagen der Schicht im Gitter betrachtet worden sind. Die Ergebnisse bestätigen jedoch die Vermutung, daß die früher aus der Theorie entnommene starke Abhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung von der Schichtdicke durch das Extrapolationsverfahren von CRITTENDEN und HOFFMANN vorgetauscht worden ist und kein korrektes Resultat der Spinwellentheorie ist.

Herrn Dr. GUTZWILLER und Herrn Dr. THOMAS habe ich für zahlreiche anregende Diskussionen zu danken. Herrn DRANGEID danke ich für Hilfe bei der Vorbereitung der numerischen Berechnungen, Herrn MÜNGER für die Programmierung und Überwachung der Rechnungen an der elektronischen Rechenmaschine.

Zum Einfluß von Inhomogenitäten mit Schichtstruktur auf die galvanomagnetischen Effekte

Von G. BOGNER und H. RUPPRECHT

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen
(Z. Naturforschg. **16 a**, 1152–1161 [1961]; eingegangen am 21. Juli 1961)

Es wird gezeigt, daß durch eine Überstruktur der Störstellenverteilung in Form von Schichten die galvanomagnetischen Effekte in empfindlicher Weise gestört werden können. Dies kann sich in einer ausgeprägten Anisotropie der Widerstandsänderung äußern, welche durch die Überlagerung einer hohen geometriebedingten Widerstandsänderung hervorgerufen wird. Aus der Abhängigkeit dieser geometrischen Widerstandsänderung vom Winkel zwischen Magnetfeld und Probenlängsachse läßt sich auf die Lage der Schichtstruktur relativ zum Probensystem schließen. Man erhält den unverfälschten Wert der physikalischen Widerstandsänderung nur dann, wenn die Normale der Schichtstruktur senkrecht auf der Probenlängsachse steht. Im Gegensatz zur Widerstandsänderung erweist sich der in *B* lineare HALL-Effekt unabhängig von der relativen Lage der Schichtstruktur. Man mißt stets den gleichen Mittelwert des HALL-Koeffizienten.

Bei der Messung des planaren HALL-Effektes macht sich die Überstruktur der Störstellenverteilung wiederum störend bemerkbar. Für die Extremlagen, Schichtnormale parallel und senkrecht zur Probenlängsachse, findet man den wahren planaren HALL-Effekt. Jedoch bereits kleine Abweichungen von diesen beiden Idealfällen (10° – 15°) führen zu einer starken Verfälschung der Winkelabhängigkeit. Da diese Extremfälle experimentell nur schwer zu realisieren sind, kann der Bestimmung der Widerstandsänderung aus Messungen des planaren HALL-Effektes, wie sie in einer früheren Arbeit² vorgenommen wurde, nur qualitative Bedeutung zukommen. Unter den dort gemachten Einschränkungen aber stellt die Messung des planaren HALL-Effekts zweifelsohne ein weiteres Hilfsmittel dar, eine Entscheidung über die Größenordnung der wahren Widerstandsänderung zu treffen.

Bei Halbleitern mit hoher Trägerbeweglichkeit μ und kleiner physikalischer Widerstandsänderung $\Delta R/R_0$ können Inhomogenitäten in der Störstellenverteilung zu Widerstandsänderungen im Magnetfeld führen, welche um Größenordnungen über der wahren physikalischen Widerstandsänderung liegen. Die Erhöhung des Widerstandes beruht auf einer Stromverdrängung durch das Magnetfeld. Dieser Effekt tritt bei n-leitendem InSb infolge der extrem hohen Elektronenbeweglichkeit bereits bei verhält-

nismäßig geringen Konzentrationsschwankungen auf. Falls die Verteilung der Inhomogenitäten unbekannt ist, läßt sich über die Stromverdrängung keine Voraussage machen. Für den Fall einer Schichtstruktur der Inhomogenitäten jedoch wurde das Problem der Widerstandserhöhung im Magnetfeld theoretisch von HERRING¹ gelöst. Die in früheren Arbeiten^{2, 3} gefundenen experimentellen Ergebnisse für die Widerstandsänderung an n-leitendem InSb stehen in gutem Übereinklang mit den Resultaten von HERRING, wenn

¹ C. HERRING, J. Appl. Phys. **31**, 1938 [1960].

² H. RUPPRECHT, R. WEBER u. H. WEISS, Z. Naturforschg. **15 a**,

³ 783 [1960].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

man annimmt, daß der Einbau der Störstellen in Schichten schwankender Konzentration erfolgt und diese Schichten praktisch senkrecht zur Wachstumsrichtung liegen. Diese Schichten bewirken im Magnetfeld eine Stromverdrängung, welche der Verdrängung der Strombahnen an den Stromelektroden ähnlich ist und ebenfalls zu einer Erhöhung des Widerstandes führt^{4, 5} (Abb. 1).

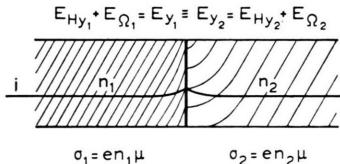


Abb. 1. Erläuterung der Stromverdrängung an einer einmali gen Konzentrationsstufe senkrecht zur Probenlängsachse. Das Magnetfeld steht senkrecht zur Zeichenebene. Die Trägerdichte n_1 sei kleiner als n_2 , angedeutet durch die engere Folge der Äquipotentiallinien. Die Beweglichkeit μ hingegen sei in beiden Bereichen gleich groß. Aus rot $E=0$ folgt unmittelbar $E_{y1}=E_{y2}$; d. h.: zu den HALL-Feldstärken treten, hervorgerufen durch die Stromverdrängung, Ohmsche Anteile hinzu, so daß gerade diese Bedingung für die Gesamtfeldstärke erfüllt wird.

Es soll nun im folgenden der Einfluß einer derartigen Schichtstruktur auf Widerstandsänderung, HALL-Effekt und planaren HALL-Effekt bei einem Medium mit isotroper Bandstruktur diskutiert werden. Dabei kann die Flächennormale der Schichtenfolge eine beliebige Lage zu einem mit der Probe festverbundenen Koordinatensystem besitzen.

$$\varrho_{x'x'}^{\text{eff}} = n \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \varrho_{x'x'} + n \left(\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right) \frac{\varrho_{x'y'} \varrho_{z'x'} \varrho_{y'z'}}{\varrho_{y'y'} \varrho_{z'z'} - \varrho_{y'z'} \varrho_{z'y'}} + \frac{\varrho_{x'z'} \varrho_{y'x'} \varrho_{z'y'}}{\varrho_{x'y'} \varrho_{y'z'} \varrho_{z'z'}} - \frac{\varrho_{x'y'} \varrho_{y'x'} \varrho_{z'z'}}{\varrho_{x'z'} \varrho_{z'x'} \varrho_{y'y'}} - \frac{\varrho_{x'z'} \varrho_{z'x'} \varrho_{y'y'}}{\varrho_{y'y'} \varrho_{z'z'} - \varrho_{y'z'} \varrho_{z'y'}}. \quad (3)$$

Dabei bedeutet n die Elektronenkonzentration einer beliebig herausgegriffenen Schicht und $\varrho_{\mu\nu}$ die $\mu\nu$ -te Komponente des Widerstandstensors aus der gleichen Schicht.

Im Fall InSb, also eines Mediums mit isotroper Bandstruktur, lassen sich die Komponenten $\varrho_{\mu\nu}$ des Widerstandstensors auf die bereits in einer früheren Arbeit³ beschriebene Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \varrho_{x'x'} &= \varrho_0 + \alpha_{12}(B^2 - B_x'^2), & \varrho_{x'y'} &= R_H B_z' - \alpha_{12} B_x' B_y', & \varrho_{x'z'} &= -R_H B_y' - \alpha_{12} B_x' B_z', \\ \varrho_{y'x'} &= -R_H B_z' - \alpha_{12} B_x' B_y', & \varrho_{y'y'} &= \varrho_0 + \alpha_{12}(B^2 - B_y'^2), & \varrho_{y'z'} &= R_H B_x' - \alpha_{12} B_y' B_z', \\ \varrho_{z'x'} &= R_H B_y' - \alpha_{12} B_x' B_z', & \varrho_{z'y'} &= -R_H B_x' - \alpha_{12} B_y' B_z', & \varrho_{z'z'} &= \varrho_0 + \alpha_{12}(B^2 - B_z'^2). \end{aligned} \quad (4)$$

ϱ_0 ist der spezifische Widerstand der jeweils betrachteten Schicht ohne Magnetfeld. α_{12} ist der Koeffizient der transversalen Widerstandsänderung, R_H der HALL-Koeffizient. B_x' , B_y' und B_z' sind die Komponenten des Magnetfeldes bezüglich der Schicht.

⁴ H. WEISS u. H. WELKER, Z. Phys. **138**, 322 [1954].

⁵ H. LIPPmann u. F. KUHRT, Z. Naturforschg. **13a**, 462 [1958].

Bevor wir jedoch auf die allgemeine Behandlung dieses Problems näher eingehen, wollen wir im nächsten Abschnitt die wesentlichen Ergebnisse von HERRING zusammenfassen.

Theoretische Behandlung der Schichtstruktur nach Herring

Entsprechend dem tensoriellen Zusammenhang $E = [\varrho]j$ zwischen elektrischer Feldstärke E und Stromdichte j für ein homogenes Medium findet HERRING bei einem geschichteten Medium für die räumlichen Mittelwerte $\langle E \rangle$ und $\langle j \rangle$ folgende Tensorbeziehung:

$$\langle E \rangle = [\varrho_{\text{eff}}] \langle j \rangle. \quad (1)$$

Nimmt man an, daß die Schichten senkrecht auf der x' -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems $x' y' z'$ stehen und sich nur hinsichtlich der Ladungsträgerkonzentration unterscheiden und überdies die Beweglichkeit in allen Schichten gleich ist, so lassen sich die Komponenten des effektiven Widerstandstensors $\varrho_{\mu\nu}^{\text{eff}}$ aus den Komponenten $\varrho_{\mu\nu}$ des homogenen Materials folgendermaßen darstellen:

$$\varrho_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \frac{n}{\langle n \rangle} \cdot \varrho_{\mu\nu} \quad (2)$$

für jedes $\mu\nu$ -Paar außer $x' x'$.

Für die $x' x'$ -Komponente gilt:

Einfluß der Schichtstruktur auf die Widerstandsänderung

Wir wollen nun das Problem der Widerstandsänderung bei allgemeiner Lage der Schichtnormalen n bezüglich eines mit der Probe starr verbundenen orthogonalen Koordinatensystems K mit den Basisvektoren ξ , η und ζ untersuchen. Zu diesem Zweck muß der von HERRING¹ angegebene Widerstands-

tensor $[\varrho_{\text{eff}}]$ aus Gl. (1), welcher mit einem in der Schicht fixierten Koordinatensystem K' verknüpft ist, in das Probensystem K transformiert werden. Wir nehmen an, daß die Basisvektoren ξ , η und ζ des Probensystems gleichzeitig die Flächennormalen der entsprechenden Begrenzungsfächen des Probenquaders sind, die Probenlängsachse sei parallel zur ξ -Richtung. Da die spezielle Lage von η' und ζ' in der Schichtebene für unser Problem unwesentlich ist, wählen wir aus der Mannigfaltigkeit der Transformationen, welche ein System K in K' überführen, so daß ξ in $n = (n_x, n_y, n_z) = \xi'$ übergeht, diejenige Transformation aus, welche sich als Drehung um die Achse $\delta = n \times \xi = (0, n_z, -n_y)$ um einen Winkel α darstellen läßt (vgl. Abb. 2).

Falls $n_x = \cos \alpha$, $n_y = -\cos \beta$ und $n_z = \cos \gamma$, dann hat die gewünschte Transformationsmatrix folgende Form:

$$\begin{bmatrix} b & -c & d \\ c & e & f \\ -d & f & g \end{bmatrix}, \quad (5)$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} b &= \cos \alpha, & c &= \cos \beta, & d &= \cos \gamma, \\ e &= \frac{\cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, & f &= \frac{\cos \beta \cos \gamma (1 - \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}, \\ g &= \frac{\cos^2 \gamma \cos \alpha + \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Mit Hilfe dieser Transformations-Matrix und Gl. (4) ergibt sich bei Vernachlässigung der physikalischen Widerstandsänderung ($\alpha_{12} = 0$) für den effektiven spezifischen Widerstand längs der Probenachse:

$$\begin{aligned} \varrho_{xx \text{ eff}} &= \varrho_0 \left[(c^2 + d^2) \frac{n}{\langle n \rangle} + b^2 n \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \right] \\ &\quad + \varrho_0 b^2 n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right] \\ &\quad \cdot \frac{\mu^2 [(f B_y - d B_x + g B_z)^2 + (c B_x + e B_y + f B_z)^2]}{1 + \mu^2 (b B_x - c B_y + d B_z)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Aus Gl. (7) können wir nun die Abhängigkeit der Widerstandsänderung vom Winkel φ zwischen Richtung des Stromes I und der magnetischen Induktion B berechnen. Dabei kann der Vektor B entweder in der ξ, η -Ebene oder in der ξ, ζ -Ebene gedreht werden. Bezuglich der Festlegung des Winkels φ wollen wir folgende Vereinbarung treffen: Bei der Drehung von B aus der positiven x -Achse zur positiven y -Achse soll der Winkel φ von 0° auf 90° zunehmen (Abb. 3). Analoges gilt, falls der Vektor B in der ξ, ζ -Ebene liegt. Man hat dann die positive y -Achse mit der positiven z -Achse zu vertauschen.

A) Vektor B in der ξ, η -Ebene

Für den Fall, daß der Vektor B in der ξ, η -Ebene liegt, gilt nach der obigen Festsetzung über den Drehwinkel:

$$B_x = B \cos \varphi, \quad B_y = B \sin \varphi. \quad (8)$$

Daraus ergibt sich für den effektiven spezifischen Widerstand im Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \varrho_{xx \text{ eff}} &= \varrho_0 \left[(c^2 + d^2) \frac{n}{\langle n \rangle} + b^2 n \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \right] \\ &\quad + b^2 \varrho_0 n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right] \\ &\quad \cdot \frac{(\mu B)^2 [(f \sin \varphi - d \cos \varphi)^2 + (c \cos \varphi + e \sin \varphi)^2]}{1 + [(\mu B) (b \cos \varphi - c \sin \varphi)]^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Eine elementare (hier nicht angeführte) Rechnung ergibt, daß der Widerstand für ein fest vorgegebene B seinen maximalen Wert erreicht, wenn der Ausdruck $(b \cos \varphi - c \sin \varphi)$ im Nenner verschwindet. Es gilt also:

$$\tan \varphi_{\max}(B_x, B_y) = b/c. \quad (10)$$

Man kann sich dies auf folgende Weise plausibel machen: Für jeden Winkel φ , bei welchem der im Nenner stehende Ausdruck nicht verschwindet, bleibt der Widerstand für $\lim_{B \rightarrow \infty} \varrho_{xx \text{ eff}}$ endlich. Der Widerstand wächst nur bei demjenigen Winkel φ mit B^2 stetig an, für welchen der Klammerausdruck im Nenner Null wird. Anschaulich bedeutet das: Für diesen Drehwinkel $\varphi_{\max}(B_x, B_y)$ steht der Vektor B senkrecht auf der Flächennormalen. Denn es gilt

$$n \cdot B = B(b \cos \varphi - c \sin \varphi) = 0, \quad (11)$$

$$\text{da } n = (n_x, n_y, n_z) = (b, -c, d). \quad (12)$$

B) Vektor B in der ξ, ζ -Ebene

Falls der Vektor B in der ξ, ζ -Ebene liegt, gilt:

$$B_x = B \cos \varphi; \quad B_z = B \sin \varphi. \quad (13)$$

Für den spezifischen Widerstand im Magnetfeld finden wir dann folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \varrho_{xx \text{ eff}} &= \varrho_0 \left[(c^2 + d^2) \frac{n}{\langle n \rangle} + b^2 n \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \right] \\ &\quad + b^2 \varrho_0 n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right] \\ &\quad \cdot \frac{(\mu B)^2 [(g \sin \varphi - d \cos \varphi)^2 + (c \cos \varphi + f \sin \varphi)^2]}{1 + [(\mu B)^2 (b \cos \varphi + d \sin \varphi)]^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Den maximalen Wert des Widerstandes in Abhängigkeit von φ erhalten wir in analoger Weise zu dem

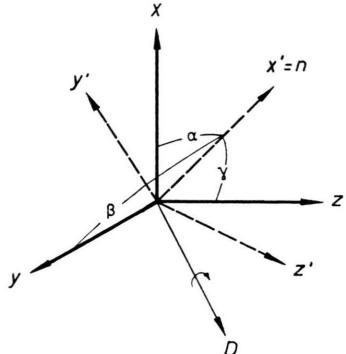


Abb. 2. Zur Festlegung der Transformation. x, y, z sei das Koordinatensystem der Probe; x', y', z' das mit der Schichtstruktur festverbundene System. D sei die Drehachse der Transformation.

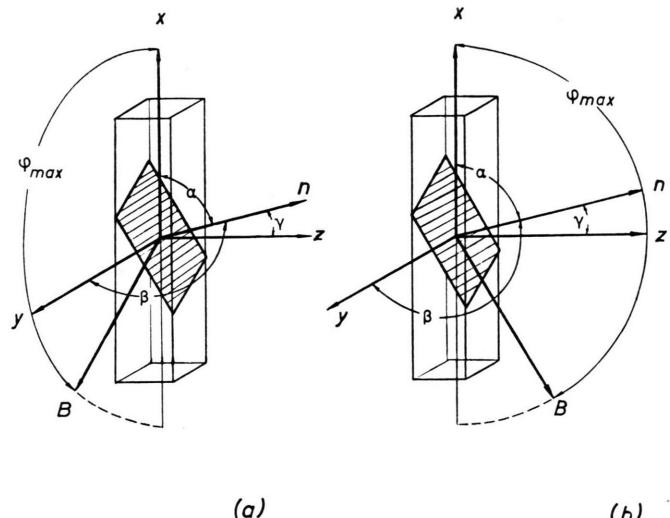


Abb. 4. Allgemeine Lage der Schichtstruktur bezüglich des Proben-systems. a) Vektor B in der x, y -Ebene; b) Vektor B in der x, z -Ebene.

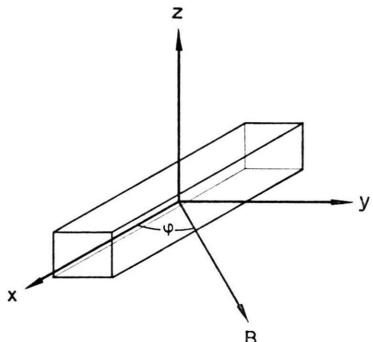


Abb. 3. Festlegung des Drehwinkels φ zwischen Probenlängsachse und Richtung der magnetischen Induktion B .

in Abschnitt A) Gesagten, wenn gilt:

$$b \cos \varphi + d \sin \varphi = 0 \text{ oder } \tan \varphi_{\max}(B_x, B_z) = -b/d. \quad (15)$$

Auch in diesem Fall steht der Vektor B dann wieder senkrecht auf der Schichtnormalen. Siehe hierzu Abb. 4.

C) Bestimmung der relativen Lage der Schichtenfolge

Auf Grund der oben gemachten Aussagen lässt sich durch Bestimmung der beiden Winkel $\varphi_{\max}(B_x, B_y)$

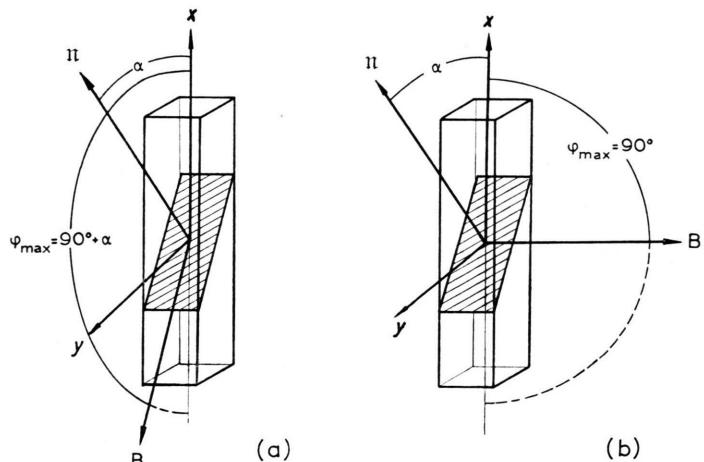


Abb. 5. Schichtnormale n in der x, y -Ebene. α Winkel zwischen n und x -Achse.

und $\varphi_{\max}(B_x, B_z)$ die Lage der Schichtenfolge relativ zum Proben-Koordinatensystem exakt angeben. Man findet für die Richtungskosinusse der Schichtnormalen n :

$$\cos \alpha = -\frac{AB}{W^{1/2}}, \quad \cos \beta = -\frac{B}{W^{1/2}}, \quad \cos \gamma = \frac{A}{W^{1/2}}, \quad (16)$$

wobei

$$A = \tan \varphi_{\max}(B_x, B_y);$$

$$B = \tan \varphi_{\max}(B_x, B_z) \quad \text{und} \quad W = A^2 + B^2 + A^2 B^2. \quad (17)$$

D) Behandlung von speziellen Lagen der Schichtnormalen \mathbf{n}

Nachdem wir mit den Gln. (9) und (14) die Abhängigkeit des effektiven Widerstandes vom Drehwinkel φ bei allgemeiner Lage der Schichtnormalen gewonnen haben, wollen wir einige Spezialfälle diskutieren:

- D 1. Die Schichtnormale \mathbf{n} fällt mit der Probenlängsachse zusammen.
- D 2. Die Drehachse \mathbf{d} ist parallel zur β -Achse;
- $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (α Winkel zwischen Schichtnormalen und \mathbf{x} -Achse),
 - $\alpha = 90^\circ$.

1. Schichtnormale \mathbf{n} parallel zur Probenlängsachse

Wir wollen zunächst den einfachsten Fall herausgreifen, nämlich daß die Schichten senkrecht auf der Probenlängsachse stehen, \mathbf{n} also parallel der Probenlängsachse verläuft. Dann fällt das Koordinaten-

system K mit dem System K' zusammen. Die Transformationsmatrix geht in die Einheitsmatrix über. Es gilt also:

$$c=d=f=0 \quad \text{und} \quad b=e=g=1. \quad (18)$$

Die Gln. (9) und (14) liefern denselben Ausdruck für die Winkelabhängigkeit des spezifischen Widerstandes, gleichgültig, ob der Vektor B in der \mathbf{x} , \mathbf{y} - oder \mathbf{z} -Ebene liegt. Man erhält die in einer früheren Arbeit³ bereits abgeleitete Beziehung:

$$\rho_{xx\ eff} = n \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \rho_0 + n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right] \rho_0 \frac{(\mu B)^2 \sin^2 \varphi}{1 + (\mu B)^2 \cos^2 \varphi}. \quad (19)$$

Den maximalen spezifischen Widerstand findet man bei $\varphi = 90^\circ$. Für $\mu B \ll 1$ ändert sich der Widerstand nach einem \sin^2 -Gesetz. Bei $\mu B \gg 1$ jedoch gilt in der Umgebung von $\varphi = 0^\circ$ und 180° eine \tan^2 -Abhängigkeit. Experimentell hat man diese Beziehung (19) für den effektiven spezifischen Widerstand immer dann zu erwarten, wenn die Probenlängsachse parallel zur Ziehrichtung des Mutterkristalls verläuft.

Berücksichtigt man bei der Herleitung von $\rho_{xx\ eff}$ auch die physikalische Widerstandsänderung, also $\alpha_{12} \neq 0$, so findet man an Stelle von Gl. (19) folgenden Ausdruck:

$$\rho_{xx\ eff} = n \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \rho_0 [1 + p \sin^2 \varphi] + n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right] \rho_0 \frac{(\mu B)^2 \sin^2 \varphi - \left(\frac{\sin 2 \varphi}{2} \right)^2 [p(\mu B)^2 + p^2(1+p)]}{(\mu B)^2 \cos^2 \varphi + [1 + p \cos^2 \varphi][1+p]}. \quad (19\ a)$$

Die vollständige Beziehung für die gesamte Widerstandsänderung lautet somit:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = p \cdot \sin^2 \varphi + \left[1 - \frac{1}{\langle n \rangle \langle 1/n \rangle} \right] \frac{(\mu B)^2 \sin^2 \varphi - \frac{\sin^2 2 \varphi}{4} [p(\mu B)^2 + p^2(1+p)]}{(\mu B)^2 \cos^2 \varphi + [1 + p \cos^2 \varphi][1+p]}. \quad (19\ b)$$

$$\text{Der Maximalwert wird gegeben durch} \quad \frac{\Delta R}{R_{0\ max}} = p + \left[1 - \frac{1}{\langle n \rangle \langle 1/n \rangle} \right] \frac{(\mu B)^2}{1+p}. \quad (19\ c)$$

Dabei bedeutet $p = \alpha_{12} B^2 / \rho_0$ die transversale physikalische Widerstandsänderung. Den Ausdruck $\left[1 - \frac{1}{\langle n \rangle \langle 1/n \rangle} \right]$ nennen wir Schwankungsglied und bezeichnen ihn mit S .

Aus Gl. (19 a) bzw. (19 b) geht hervor, daß für Winkel $\varphi \neq 90^\circ$ der Beitrag der physikalischen Widerstandsänderung von der gleichen Größenordnung sein kann wie der der geometrischen Widerstandsänderung. Dies gilt ganz besonders für große Werte von μB und kleine Konzentrationsschwankungen in den einzelnen Schichten. Die in einer früheren Arbeit³ (Abb. 7) vor allem bei größeren Magnetfeldern und $\varphi \neq 90^\circ$ gefundene Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment ist in der Hauptsache auf

die Vernachlässigung der physikalischen Widerstandsänderung zurückzuführen. Berechnet man nämlich in dem erwähnten Fall die Winkelabhängigkeit der gesamten Widerstandsänderung aus Gl. (19 b) unter Berücksichtigung der experimentellen Daten für α_{12} , μ , so erhält man praktisch vollständige Übereinstimmung zwischen den theoretischen und experimentellen Resultaten. In Abb. 7 dieser Arbeit werden die theoretisch berechneten Kurven für $B = 1$ und 10 kGauß mit dem Experiment verglichen. Auch für andere Magnetfelder (zwischen 1 und 10 kGauß) konnte im Rahmen der Meßgenauigkeit eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment gefunden werden. Die Meßpunkte wurden an einer Probe mit $n = 5,4 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ bei Zimmertemperatur

gewonnen (Arbeit², Abb. 7*). α_{12} wurde aus der unteren ausgezogenen Kurve der Abb. 4 aus Arbeit² entnommen, also gesondert an einer zweiten Probe bestimmt, bei welcher kein Geometrieffekt auftritt. Das Schwankungsglied S wurde mit Hilfe von Gl. (19 c) aus dem Maximalwert von $\Delta R/R_0$ für 10 kGauß (Abb. 8, Arbeit²) zu $1,4 \cdot 10^{-2}$ bestimmt. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Probe nur aus zwei Sorten von Schichten mit Elektronenkonzentrationen n_1 und n_2 und gleichem Volumenanteil besteht, läßt sich dieser Wert durch ein Konzentrationsverhältnis von $n_1/n_2 = 0,79$ verifizieren.

2. Drehachse δ parallel zur β -Achse

Schneidet man jedoch die Proben aus einer einkristallinen Platte, welche die Ziehrichtung enthält,

$$\varrho_{xx\text{ eff}} = n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \cos^2 \alpha + \frac{1}{\langle n \rangle} \sin^2 \alpha \right] \varrho_0 + \cos^2 \alpha n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right] \varrho_0 \frac{(\mu B)^2 (\sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)}{1 + (\mu B)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi} . \quad (21)$$

Der maximale Widerstand tritt bei $\varphi = 90^\circ$ auf. Falls der Vektor B in der ξ, η -Ebene gedreht wird, erhalten wir aus Gl. (9) :

$$\begin{aligned} \varrho_{xx\text{ eff}} &= n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \cos^2 \alpha + \frac{1}{\langle n \rangle} \sin^2 \alpha \right] \varrho_0 \\ &\quad + \cos^2 \alpha n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right] \varrho_0 \frac{(\mu B)^2 \sin^2(\alpha + \varphi)}{1 + (\mu B)^2 \cos^2(\alpha + \varphi)} . \end{aligned} \quad (22)$$

Der maximale Widerstand tritt nun bei $\varphi = 90^\circ - \alpha$ auf. Gegenüber dem Fall D 1) ist der Maximalwert der relativen Widerstandsänderung nach Gl. (21) und (22) um den Faktor

$$\cos^2 \alpha / \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{\langle n \rangle \langle 1/n \rangle} \sin^2 \alpha \right)$$

reduziert.

In Abb. 6 sind als Beispiel die für einen solchen Fall gewonnenen Resultate wiedergegeben. Es handelt sich um Messungen von WEBER an einem einkristallinen Stab aus InSb mit Probenlängsachse [112]. Der Stab war aus einer Platte ausgeschnitten worden, welche die Ziehrichtung [111] enthielt. Theoretisch müßte also das eine Maximum bei $\varphi = 90^\circ$ auftreten, das zweite Maximum bei $\varphi = 90^\circ \pm 19^\circ$. Tatsächlich liegen die Maxima bei $\varphi \cong 95^\circ$ und $\varphi \cong 110^\circ$.

Für den Sonderfall $\alpha = 90^\circ$ erhalten wir als Transformationsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (23)$$

derart aus, daß die Probenlängsachse einen beliebigen Winkel α mit der Ziehrichtung bildet, so wird auch die Schichtnormale π den gleichen Winkel zur Probenlängsachse haben, da die Schichten senkrecht zur Ziehrichtung liegen sollen. Man kann diese spezielle Lage der Schichten ohne Beschränkung der Allgemeinheit dadurch beschreiben, daß die Drehachse δ mit der β -Achse zusammenfällt. Die Schichtnormale π liegt dann definitionsgemäß in der ξ, η -Ebene (Abb. 5). Für die Transformationsmatrix erhalten wir somit:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (20)$$

Also gilt $b = e = \cos \alpha$, $c = \sin \alpha$, $d = f = 0$, $g = 1$.

Falls der Vektor B in der ξ, β -Ebene gedreht wird, ergibt sich mit Gl. (14) :

$$\varrho_{xx\text{ eff}} = n \left[\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right] \varrho_0 \frac{(\mu B)^2 (\sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi)}{1 + (\mu B)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi} . \quad (21)$$

Also gilt $c = -1$, $g = 1$, $b = e = d = f = 0$.

Die Probenlängsachse liegt nun in der Schichtebene. Die Gln. (9) und (14) liefern beide das gleiche Ergebnis für den spezifischen Widerstand:

$$\varrho_{xx\text{ eff}} = \frac{n}{\langle n \rangle} \varrho_0 , \quad (24)$$

also unabhängig von B .

Falls eine physikalische Widerstandsänderung auftritt, also $\alpha_{12} \neq 0$ ist, findet man:

$$\varrho_{xx\text{ eff}} = \frac{n}{\langle n \rangle} \varrho_0 + \frac{n}{\langle n \rangle} \alpha_{12} B^2 \sin^2 \varphi . \quad (25)$$

Man mißt somit in diesem Fall die reine physikalische Widerstandsänderung, ohne einen störenden Beitrag auf Grund der Schichtstruktur. Ganz allgemein läßt sich feststellen, daß Proben mit einer Längsachse senkrecht zur Ziehrichtung die tatsächliche physikalische Widerstandsänderung ergeben [vgl. Gln. (9) und (14)].

E) Sonderfall der Rasterplatte

Wir haben bis jetzt ein 3-dimensionales Problem behandelt, bei dem eine Verdrängung des ursprünglich in der Kristallprobe in ξ -Richtung fließenden Stromes durch das Magnetfeld in η - und β -Richtung

* Die in dieser Abbildung mit 6 kGauß bezeichnete Kurve wurde tatsächlich bei 4 kGauß gemessen.

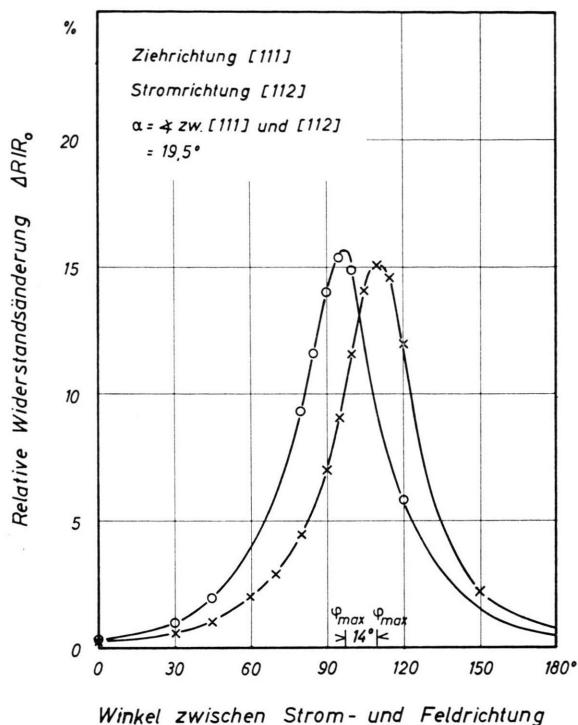


Abb. 6. Beispiel zur Bestimmung der relativen Lage der Schichten durch Messung der beiden Winkel φ_{\max} . Die Probe war aus einer einkristallinen Platte herausgeschnitten, welche die Ziehrichtung [111] enthielt. Die Probenlängsachse lag in [112]-Richtung. Der Vektor B wurde im Fall der durch \circ wiedergegebenen Kurve in der von [112] und [110] aufgespannten Ebene gedreht, also der (111)-Ebene, im zweiten Fall (Meßpunkte \times) in der durch [112] und [111] aufgespannten Ebene, also der (110)-Ebene. $B=10 \text{ kGauß}$, $T=295 \text{ }^{\circ}\text{K}$. Messungen nach R. WEBER.

möglich war. Reduziert man das 3-dimensionale Problem auf ein ebenes, indem man z. B. die Ausdehnung der Kristallprobe in ζ -Richtung beliebig klein macht, dann ist eine Stromverdrängung in ζ -Richtung nicht mehr möglich und man hat den Fall der sogenannten „Rasterplatte“.

Wir nehmen an, daß der Strom in Richtung der Plattenlängsachse ξ fließt. Die Schichtnormale η bilde einen Winkel α mit der letzteren. Der Vektor B liege in der ξ, ζ -Ebene, die senkrecht auf der Plattenebene steht. Ferner soll der Koeffizient der physikalischen Widerstandsänderung α_{12} wieder Null sein.

Dann erhält man unter Verwendung der Theorie von HERRING¹ und Berücksichtigung, daß

$$\langle j_y \rangle = \langle j_z \rangle = \langle j_{z'} \rangle \equiv 0$$

für den effektiven spezifischen Widerstand der Ra-

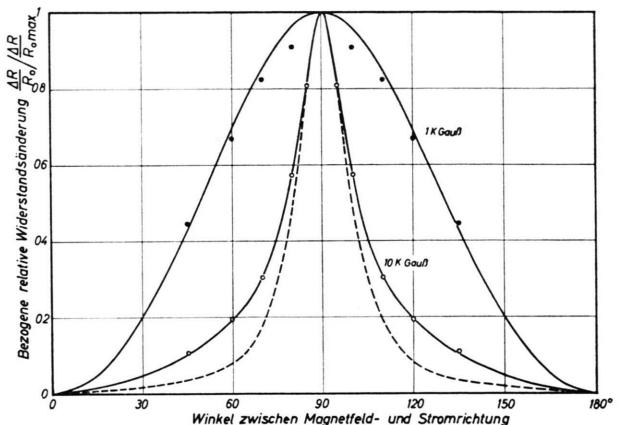


Abb. 7. Bezugene relative Widerstandsänderung als Funktion des Winkels zwischen Strom und Magnetfeldrichtung. $n=5,4 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $T=295 \text{ }^{\circ}\text{K}$. Die Meßpunkte wurden einer früheren Arbeit entnommen. ● 1 kGauß, ○ 10 kGauß. Die durchgezogenen Kurven entsprechen der theoretischen Abhängigkeit bei Berücksichtigung der physikalischen Widerstandsänderung, $\alpha_{12} \neq 0$. Die gestrichelte Kurve erhält man bei Vernachlässigung der physikalischen Widerstandsänderung, $\alpha_{12}=0$.

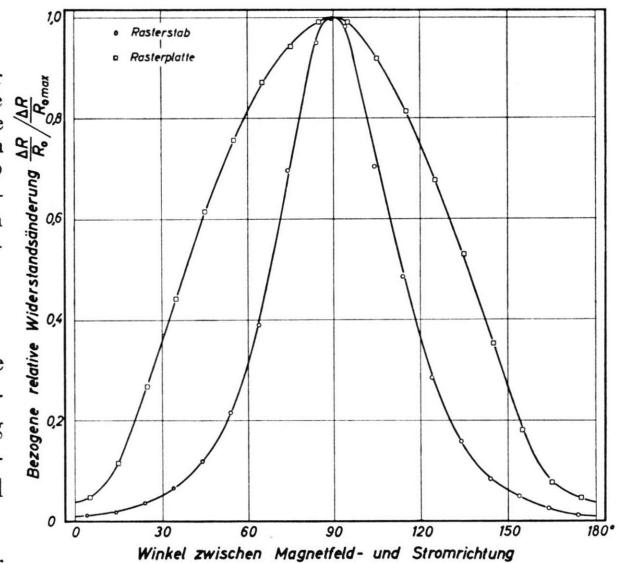


Abb. 8. Winkelabhängigkeit der Widerstandsänderung für ein räumliches und ein ebenes Rastermodell. Die Maximalwerte sind auf den Wert 1 normiert. Der Rasterstab wurde aus einkristallinen InSb-Scheiben von 0,5 mm Dicke zusammengelötet. Die Rasterplatte war durch Abschleifen des Stabes auf 0,2 mm entstanden. $B=20 \text{ kGauß}$; $T=295 \text{ }^{\circ}\text{K}$.

sterplatte im Magnetfeld:

$$\begin{aligned} Q_{xx \text{ eff}} = Q_0 & \left[\left(n \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \cos^2 \alpha + \left\langle \frac{n}{n} \right\rangle \sin^2 \alpha \right) \right. \\ & \left. + n \left(\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\left\langle n \right\rangle} \right) \cos^2 \alpha (\mu B)^2 \sin^2 \varphi \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Wir sehen, daß bei der Rasterplatte immer eine Abhängigkeit der Widerstandsänderung zu erwarten ist, die quadratisch mit dem Sinus des Drehwinkels φ geht, im Gegensatz zur stabförmigen Kristallprobe, wo für große B in der Umgebung von $\varphi = 0^\circ$ und 180° die Widerstandsänderung in guter Näherung nach einem \tan^2 -Gesetz vom Winkel φ abhängt [vgl. z. B. Gl. (19)]. Ferner liegt das Maximum der Widerstandsänderung immer bei transversaler Stellung von B und I vor.

Um die Verhältnisse beim Übergang von einer stabförmigen Kristallprobe zur Rasterplatte studieren zu können, wurden Proben angefertigt, bei denen eine zur Probenlängsachse senkrechte Schichtstruktur dadurch erzeugt wurde, daß mehrere Tedotierte InSb-Scheiben mittels dünner In-Lamellen aufeinander gelötet wurden. In Abb. 8 sind die Meßergebnisse aufgetragen, die an einem so präparierten Rasterstab und einer aus diesem Stab durch Abschleifen erhaltenen Rasterplatte gewonnen wurden. Es zeigt sich, daß der Verlauf der Widerstandsänderung in Abhängigkeit von φ beim Rasterstab eine singuläre Form aufweist (näherungsweise ein \tan^2 -Gesetz), während bei der Rasterplatte die Widerstandsänderung nach einem \sin^2 -Gesetz vom Drehwinkel φ abhängt.

Die experimentell an den Modellproben gefundene Abhängigkeit der Widerstandsänderung vom Drehwinkel φ bestätigt die aus der Theorie hergeleitete Beziehung (26). Das heißt aber andererseits, daß die in der Theorie gemachte Voraussetzung: $\mu = \text{const}$ für alle Schichten, die bei den Modellproben auf keinen Fall erfüllt ist, für die Winkelabhängigkeit der Widerstandsänderung von untergeordneter Bedeutung ist.

Normaler Hall-Effekt bei einem geschichteten Medium

Fallen wie in der üblichen Weise der Strom j_x , die HALL-Feldstärke E_y und das Magnetfeld B_z mit den 3 Achsenrichtungen des Probenkoordinatensystems x, y, z zusammen, dann liefern Gl. (4) und (5) für die HALL-Feldstärke E_y einen Ausdruck, der sich aus einem konstanten, einem in B linearen und einem in B quadratischen Glied zusammensetzt. Im Zusammenhang mit der Berechnung der HALL-Beweglichkeit interessiert nur der in B lineare Teil der HALL-Feldstärke (normaler HALL-Effekt), der meß-

methodisch durch Umpolen des Magnetfeldes isoliert wird.

Bildet man mit Hilfe von (4) und (5) die in B lineare HALL-Feldstärke für eine beliebige Lage der Schichtnormalen bezüglich des Probensystems, so ergibt sich:

$$E_H = -\frac{n}{\langle n \rangle} R_H(n) B j F. \quad (27)$$

Dabei sind E_H , B und j wieder in den 3 Richtungen des Probensystems genommen. F ist eine Winkel-funktion, die die Glieder der Transformationsmatrix (5) enthält. Eine elementare Rechnung zeigt, daß $F \equiv 1$. Das heißt, für die normale HALL-Feldstärke gilt unabhängig von der Lage der Schichtfolge immer die Gleichung:

$$E_H = -\frac{n}{\langle n \rangle} R_H(n) B j. \quad (28)$$

Dieses Ergebnis macht die in einer früheren Arbeit² gefundene Isotropie der HALL-Beweglichkeit verständlich, da die Schwankungen von μ nur durch Unterschiede der σ_{eff} -Werte je nach Lage der Schichtnormalen hervorgerufen werden. In dem in der betreffenden Arbeit² angeführten Beispiel beträgt die Variation von σ_{eff} nur einige Prozente. Somit erweist sich die Beweglichkeit als isotrop innerhalb dieser Grenzen.

Planarer Hall-Effekt bei einem geschichteten Medium

Bei den weiter vorne durchgeföhrten Berechnungen der Widerstandsänderung wurde großenteils die physikalische Widerstandsänderung im homogenen Material vernachlässigt, also $\alpha_{12} = 0$ gesetzt. Bei den nachfolgenden Betrachtungen wird die physikalische Widerstandsänderung berücksichtigt, also $\alpha_{12} \neq 0$, d. h. das homogene Material zeigt einen planaren HALL-Effekt. Es soll nun der Einfluß einer Schichtstruktur auf die Größe des planaren HALL-Effektes, sowie dessen Abhängigkeit vom Drehwinkel φ zwischen Richtung des Stromes und der magnetischen Induktion B diskutiert werden. Bezuglich der Definition von φ gelten die weiter oben gemachten Voraussetzungen (Abb. 3). Um die Ergebnisse besser übersehen zu können, sollen im folgenden nur einige spezielle Lagen der Schichtnormalen zum Koordinatensystem der Probe behandelt werden. Es wird dabei angenommen, daß der Strom wieder in Richtung der Probenlängsachse \mathfrak{x} fließt.

A) Flächennormale \parallel parallel zur ξ -Achse

Nehmen wir zunächst an, daß die Flächennormale \parallel parallel zur ξ -Achse liegt (Abb. 9.1), dann erhält man für die Feldstärke des planaren HALL-Effektes,

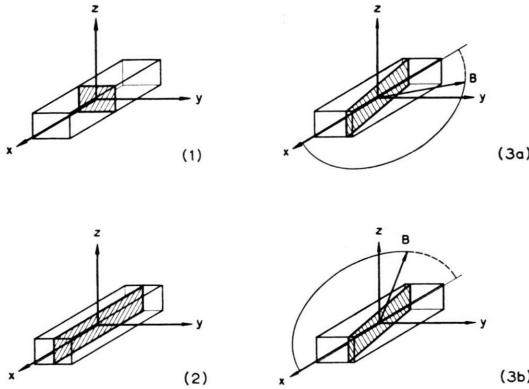


Abb. 9. Zur Messung des planaren HALL-Effektes.

gleichgültig, ob der Vektor B in der ξ, η -Ebene oder in der ξ, ζ -Ebene gedreht wird, die gleiche Beziehung

$$E_{PL} = -\frac{n}{\langle n \rangle} \alpha_{12}(n) B^2 \frac{\sin 2 \varphi}{2} j_x. \quad (29)$$

Das Maximum der Feldstärke tritt auf bei

$$\varphi = (2n+1) \pi/4.$$

B) Flächennormale \parallel senkrecht zur ξ, ζ -Ebene

Falls die Flächennormale \parallel senkrecht zur ξ, ζ -Ebene steht (Abb. 9.2), liegt die Probenlängsachse in der Schichtebene. Auch in diesem Fall gilt für die Feldstärke des planaren HALL-Effektes unabhängig davon, ob der Vektor B in der ξ, η -Ebene oder ξ, ζ -Ebene gedreht wird, wieder Gl. (29).

Für die beiden Spezialfälle A) und B) findet man demnach im Experiment den Mittelwert des Koeffizienten α_{12} über alle n Schichten. Die Abhängigkeit der Feldstärke vom Drehwinkel φ und der magnetischen Induktion B entspricht der des homogenen Materials.

C) Flächennormale \parallel in der ξ, η -Ebene mit einem beliebigen Winkel α zur ξ -Achse

Wir behandeln zunächst den Fall, daß der Vektor B in der ξ, η -Ebene liegt (Abb. 9.3a). Verwendet man Gln. (1), (2), (3) und (4), transformiert die Komponenten des elektrischen Feldes, Stromes und der magnetischen Induktion im Koordinatensystem K' ins Probensystem K mittels der angegebenen

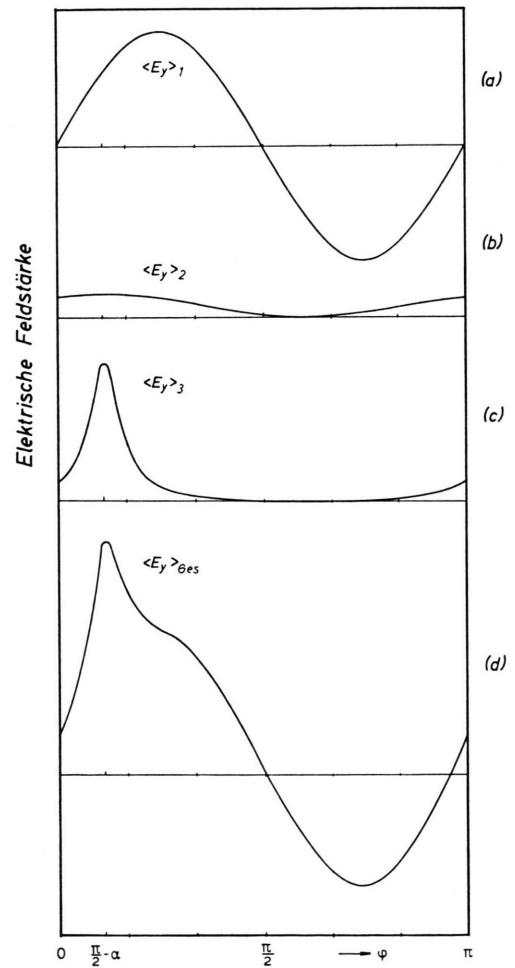
Transformationsmatrix und berücksichtigt, daß

$$\langle j_y \rangle = \langle j_z \rangle = 0 \quad \text{und} \quad B_z = 0,$$

so erhält man für die elektrische Feldstärke in y -Richtung

$$E_{PL} = -\frac{n}{\langle n \rangle} \alpha_{12}(n) B^2 \frac{\sin 2 \varphi}{2} j_x - \frac{\sin 2 \alpha}{2} n \left(\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle - \frac{1}{\langle n \rangle} \right) \cdot [q_0 + \alpha_{12}(n) B^2 \sin^2(\varphi + \alpha) + A] j_x. \quad (30)$$

A ist abgesehen von einem Faktor $\cos^2 \alpha$ in 1. Näherung identisch mit dem Ausdruck (22) für den



Winkel zw. Magnetfeld- u. Stromrichtung

Abb. 10. Einzelbeiträge $\langle E_y \rangle_n$ und resultierende planare HALL-Feldstärke für den Fall, daß die Schichtnormale in der x, y -Ebene liegt und den Winkel α mit der x -Achse bildet.
a) Normale planare HALL-Feldstärke, $\langle E_y \rangle_1 \sim B^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2 \varphi$,
b) $\langle E_y \rangle_2 \sim B^2 \sin^2(\varphi + \alpha)$,
c) $\langle E_y \rangle_3 \sim (\mu B)^2 \sin^2(\varphi + \alpha) / [(u B)^2 \cos^2(\varphi + \alpha) + 1]$,
d) Resultierende Feldstärke.

spezifischen Widerstand im Magnetfeld, da die Berücksichtigung der physikalischen Widerstandsänderung bei der Berechnung von A nur eine kleine Korrektur darstellt und deshalb vernachlässigt werden darf. Man erhält für A

$$A = \rho_0 \frac{(\mu B)^2 \sin^2(\varphi + \alpha)}{1 + (\mu B)^2 \cos^2(\varphi + \alpha)}. \quad (31)$$

Wir sehen also, daß in diesem Fall der normalen planaren HALL-Feldstärke drei weitere, durch die Schichtstruktur verursachte Feldstärken überlagert sind: eine konstante Feldstärke (ρ_0), eine Feldstärke proportional $B^2 \sin^2(\varphi + \alpha)$ und eine Feldstärke proportional A . Die beiden letzteren Feldstärken haben ein Maximum bei $\varphi = (2n+1)\pi/2 - \alpha$, wobei α durch die Lage der Schichten fest vorgegeben und φ variabel ist.

In Abb. 10 ist qualitativ die sich aus den Gln. (30) und (31) ergebende Abhängigkeit der Feldstärke E_{PL} vom Drehwinkel φ aufgezeichnet, wobei α zu 70° angenommen wurde. Dabei sind in Abb. 10 a, 10 b und 10 c die einzelnen Feldstärken getrennt aufgetragen. Abb. 10 d zeigt die aus der Überlagerung der letzteren resultierende Feldstärke E_{PL} . [Eine quantitative Auswertung der Gl. (30) ergibt, daß bei kleinen Konzentrationsschwankungen in den einzelnen Schichten die Feldstärke $\langle E_y \rangle_2$ vernachlässigbar klein ist.]

Ein Vergleich mit dem Experiment (Abb. 11) zeigt, daß die durch Gl. (30) dargestellte Abhängigkeit der Feldstärke E_{PL} vom Winkel φ durchaus realisierbar ist.

Für den Fall, daß B in der ξ, ζ -Ebene liegt (Abb. 9.3b), erhält man mit Hilfe der Gln. (1), (2), (4)

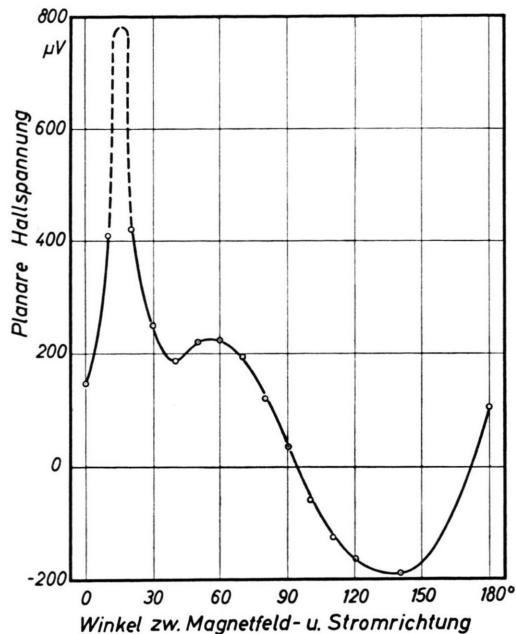


Abb. 11. Winkelabhängigkeit der planaren HALL-Spannung, gemessen an einer Probe mit Längsachse nahezu senkrecht zur Ziehrichtung. Abmessungen der Probe: $1,7 \times 1,7 \times 17 \text{ mm}^3$; $I = 100 \text{ mA}$, $B = 10 \text{ kGauß}$, $T = 78^\circ\text{K}$.

und (20) für $\langle E_z \rangle_{PL}$ wieder die normale Feldstärke des planaren HALL-Effektes [Gl. (29)].

Die Anregung zu dieser Arbeit gab ein Hinweis von Herrn Dr. C. HERRING, dem wir hierfür unseren besten Dank aussprechen möchten. Für wertvolle Diskussionsbeiträge danken wir Herrn Dr. O. MADELUNG und Herrn Dr. H. WEISS, auf dessen Veranlassung hin die Untersuchung der Widerstandsänderung an InSb durchgeführt worden war.